SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

Giovanna Citti

PROBLEMI AL CONTORNO PER EQUAZIONI SEMILINEARI CON CRESCITA CRITICA SUL GRUPPO DI HEISENBERG: IL CASO DI APERTI TOPOLOGICAMENTE BANALI

19 marzo 1992

§1 Introduzione.

Presento alcuni risultati di esistenza e non esistenza di soluzioni nonnegative del problema di Dirichlet

$$(1.1)\qquad \begin{cases} -\Delta_H u = a\,u + u^{(q+2)/(q-2)} \text{ in } \Omega, \\ u_{|\partial\Omega}=0,\ u{>}0,\ u\not\equiv 0 \text{ in } \Omega, \end{cases}$$

dove Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^{2n+1}$, Δ_H è il Laplaciano di Kohn sul gruppo di Heisenberg, e $q=2n/(n-2)$ è la dimensione omogenea dello stesso.

Alcune definizioni.

Se denotiamo gli elementi di $\mathbb{R}^{2n+1}$ nella forma $\xi=(x,y,t)$, con $x,y\in\mathbb{R}^n$ e $t\in\mathbb{R}$, allora si dice Laplaciano di Kohn l'operatore

$$\Delta_H u = \sum_{j=1}^{n} X_j^2 + Y_j^2,$$

dove

$$X_j = \frac{\partial}{\partial x_j} + 2y_j\frac{\partial}{\partial t} \qquad \text{e} \qquad Y_j = \frac{\partial}{\partial y_j} - 2x_j\frac{\partial}{\partial t}.$$

Osserviamo che $[X_j,Y_j]= -4\frac{\partial}{\partial t}$, mentre tutti gli altri commutatori sono nulli. Quindi il rango dell'algebra di Lie generata dai campi vettoriali $X_1,\dots,X_n,Y_1,\dots,Y_n$ (che indicheremo $\mathfrak{g}$), è $2n+1$ in ogni punto di $\mathbb{R}^{2n+1}$ ed è soddisfatta l'ipotesi di Hörmander per l'ipoellitticità. Inoltre è possibile definire in $\mathbb{R}^{2n+1}$ una operazione che lo rende un gruppo di Lie, e la cui algebra associata è esattamente $\mathfrak{g}$. Nel caso presente, l'operazione di gruppo è semplicemente

$$\xi\cdot\eta = \xi + \eta + \frac{1}{2}[\xi,\eta].$$

Quindi se $\xi = (x,y,t)$ e $\eta = (x',y't')$ si ha

(1.2) $\xi \cdot \eta = (x+x',\ y+y',\ t+t'-2(xy'-x'y))$.

Il gruppo così definito si dice gruppo di Heisenberg. Poiché $\mathfrak{g}$ è l'algebra di Lie associata a questo gruppo, allora i vettori X_j e Y_j sono invarianti rispetto alle traslazioni a sinistra e quindi anche Δ_H lo è. In altre parole, se per ogni fissato $\xi_0 = (x_0,y_0,t_0) \in \mathbb{R}^{2n+1}$, denotiamo

(1.3) $\tau_{\xi_0}(\xi) = \xi_0 \circ \xi$,

si ha

$$\Delta_H(u \circ \tau_{\xi_0}) = \Delta_H u \circ \tau_{\xi_0}.$$

Possiamo poi definire delle dilatazioni naturali associate all'operatore:

(1.4) $\delta_r(x,y,t) = (rx,ry,r^2t)$.

Rispetto a queste dilatazioni Δ_H è omogeneo di ordine 2, ovvero

$$\Delta_H(u \circ \delta_r) = r^2 \Delta_H u \circ \delta_r. \qquad \forall r>0 \quad \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n+1}).$$

Infine definiamo

(1.5) $d_0(x,y,t) = ((x^2+y^2)^2 + t^2)^{1/4}, \qquad \forall \xi = (x,y,t) \in \mathbb{R}^{2n+1}$

e

(1.6) $d(\xi,\xi_0) = d_0(\xi_0^{-1} \circ \xi), \qquad \xi,\ \xi_0 \in \mathbb{R}^{2n+1}$.

La funzione d_0 risulta una norma omogenea, cioè verifica

i) $d_0(\xi)=0$ implica $\xi=0$ ii) $d_0(\delta_r(\xi)) = r d_0(\xi)$

iii) $d_0(\xi) = d_0(\xi^{-1})$,

mentre d definisce una distanza, che si dice metrica di controllo associata a Δ_H. Poiché δ_r manda la palla unitaria nella palla di raggio r, un semplice cambio di variabile dimostra che la misura di Lebesgue delle palle della metrica è

$$(1.7) \qquad |B(\xi,r)| = c_q\, r^q,$$

dove $q = 2n/(n-2)$ è la costante che compare in (1.1).

Formulazione variazionale del problema (1.1).

Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^{2n+1}$; per ogni $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n+1})$ sia

$$(1.8) \qquad D_H u = (X_1 u,..,X_n u, Y_1 u,\dots,Y_n u),$$

e

$$(1.9) \qquad \|u\|_{S_0^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega |D_H u|^2\right)^{1/2}.$$

La chiusura di $C_0^\infty(\Omega)$ con la questa norma si dice spazio di Folland Stein, e si indica $S_0^1(\Omega)$. Questo è uno spazio di Banach, nel quale vale la seguente disuguaglianza di tipo Sobolev: esiste una costante $C_0>0$ tale che

$$(1.10) \qquad \|u\|_{2q/(q-2)} \le C_0 \|u\|_{S_0^1(\mathbb{R}^{2n+1})} \qquad \forall u \in S_0^1(\mathbb{R}^{2n+1}).$$

Inoltre per ogni $p<2q/(q-2)$ l'immersione

$$L^p(\Omega) \subset S_0^1(\Omega)$$

è compatta, mentre $L^{2q/(q-2)}(\Omega) \subset S^1_0(\Omega)$ non lo è.

L'evidente analogia con gli spazi di Sobolev ordinari e la forma di divergenza dell'operatore, suggeriscono di applicare tecniche variazionali per lo studio dell'equazione (1.1). Diremo quindi soluzioni di (1.1) i punti critici del funzionale

$$(1.11) \qquad I: S^1_0(\Omega) \to \mathbb{R} \qquad I(u)=\frac{1}{2}\int |D_H u|^2 - \frac{1}{2}\int au^2 - \frac{q-2}{2q}\int u^{2q/(q-2)}.$$

D'altra parte, poiché l'immersione di Sobolev (relativa all'esponente che compare esplicitamente nel funzionale) non è compatta, si pongono gli stessi problemi di mancanza di compattezza che si incontrano nel cosiddetto caso critico dell'equazione di Poisson:

$$(1.12) \qquad \begin{cases} -\Delta_H u = a\,u + u^{(n+2)/(n-2)} & \text{in } \Omega \subseteq \mathbb{R}^n, \\ u_{|\partial\Omega}=0, \quad u\geq 0, \quad u\not\equiv 0, \end{cases}$$

Ricordiamo alcuni risultati noti per questa equazione.

Il primo risultato di non esistenza si deve a Pohozaev [P], che ha dimostrato che, quando $a=0$ e Ω è stellato, allora (1.12) non ha soluzione. In seguito Brezis e Nirenberg [BN] hanno studiato dettagliatamente il problema, provando che, se $n\geq 4$, si ha

i) se $a\leq 0$, e Ω è stellato, (1.12) non ha soluzione.

ii) se $0<a<\lambda_1$, (Ω arbitrario), (1.12) ha almeno una soluzione.

iii) se $\lambda_1 \leq \alpha$, (Ω arbitrario) (1.12) non ha soluzione.

dove λ_1 è il piú piccolo autovalore del $-\Delta$. (Se n=3 la situazione è piú complessa e Brezis e Niremberg forniscono una classificazione soltanto nel caso in cui Ω sia una palla). Come si vede il problema è completamente risolto quando $a>0$. Per $a\leq 0$ si conoscono alcuni risultati di esistenza sotto opportune ipotesi topologiche su Ω (cf. [BC], [D], [Pa]), ma il problema è ancora in gran parte aperto.

Per quanto riguarda l'equazione (1.1), Garofalo e Lanconelli hanno dimostrato in [GL] che, se $a\leq 0$ e Ω è "stellato rispetto alle dilatazioni" (in un senso che definiremo piú oltre), allora (1.1) non ha soluzione.

In questo lavoro estendiamo a questo contesto le altre due affermazioni di Brezis e Nirenberg (indicate con ii) e iii), provando il teorema seguente:

Teorema 1.1. *Sia λ_1 il piú piccolo autovalore dell'operatore di Kohn. Si ha allora*

Se $a \in (0,\lambda_1)$, il problema (1.1) ha almeno una soluzione.

Se $\lambda_1 \leq a$, allora il problema (1.1) non ha soluzione.

Nel caso presente la dimensione omogenea dello spazio è sempre maggiore o al piú uguale a 4, quindi non si pongono i problemi dimensionali incontrati da Brezis e Nireremberg.

La prova che presentiamo si basa su uno studio delle successioni di Palais Smale del funzionale I. Nel paragrafo 2 mostriamo che all'equazione (1.1) sono associati in modo naturale dei problemi piú semplici, di cui si possono trovare esplicitamente le soluzioni. Con il principio di concentrazione di compattezza si riescono allora ad individuare dei livelli λ cui è verificata la condizione di Palais Smale. Infine nel paragrafo 4 applichiamo i risultati ottenuti e il Teorema del passo di Montagna per provare il Teorema 1.1.

§ 2. Successioni di Palais Smale di I.

Si dice che (u_k) è una successione di Palais Smale al livello λ per I se verifica la condizione

$$dI(u_k) \longrightarrow 0 \text{ e } I(u_k) \longrightarrow \lambda \text{ per un opportuno } \lambda>0. \tag{2.1}$$

Se, fissato λ, tutte le successioni di questo tipo sono precompatte, si dice che I verifica la condizioni di Palais Smale al livello λ, e si riescono ad individuare punti critici di I. Quando peró l'immersione di Sobolev non è compatta anche le successioni di PS possono non esserlo, ma si riescono a rappresentare in termini di opportuni problemi all'infinito.

Nel caso presente i problemi all'infinito naturali associati a (1.1) sono essenzialmente tre:

$$\begin{cases} -\Delta_H u = u^{(q+2)/(q-2)} \text{ in } \mathbb{R}^{2n+1}, \\ u\in S_0^1(\Omega), \end{cases} \tag{2.2}$$

e

$$(2.3)\qquad \begin{cases} -\Delta_H u = u^{(q+2)/(q-2)} & \text{in } \Omega, \\ u \in S^1_0(\Omega) \end{cases}$$

con Ω semispazio del tipo $\Omega = \{(x,y,t):x>0\}$, oppure $\Omega = \{(x,y,t):t>0\}$. Infatti successioni di Palais Smale non compatte si possono scrivere in termini delle soluzioni nonnegative dei due problemi. Sia per esempio ω_0 soluzione di (2.2), e I_∞ il funzionale associato all'equazione stessa:

$$(2.4)\qquad I_\infty : S^1_0(\mathbb{R}^{2n+1}) \longrightarrow \mathbb{R} \qquad I_\infty(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^{2n+1}} |D_H u|^2 - \frac{q-2}{2q}\int_{\mathbb{R}^{2n+1}} u^{2q/(q-2)}.$$

Sia poi $\xi \in \Omega$, $B(\xi,R) \subseteq\subseteq \Omega$, e $\varphi \in C^\infty_0(B(\xi,R))$ tale che $\varphi \equiv 1$ su $B(\xi,R/2)$.
Poniamo

$$(2.5)\qquad v_k = \lambda^{(q-2)/2}\ \varphi\ \omega_0 \circ\ \delta_{\lambda_k} \circ\ \tau^{-1}_\xi,$$

dove δ_λ è definita in (1.4) e τ_ξ in (1.3) e $\lambda_k \longrightarrow +\infty$, per $k \longrightarrow +\infty$.
Una semplice verifica (si veda anche il Lemma 3.4 piú oltre) consente di provare che v_k è di Palais Smale per I al livello $I_\infty(\omega_0)$, ma non ha sottosuccessioni convergenti.
Analogamente, se esistesse una soluzione ω_1 di (2.3), anche la successione $v_k = \lambda^{(q-2)/2}\ \varphi\ \omega_1 \circ\ \delta_{\lambda_k} \circ\ \tau^{-1}_\xi$, sarebbe una successione di PS non compatta.

Per quanto riguarda l'equazione su tutto lo spazio Jerison e Lee hanno dimostrato che la soluzione è unica a meno di riparametrizzazioni, nel senso seguente: la funzione

$$(2.6) \qquad \omega_0(x,y,t) = \frac{C_0}{(t^2+(1+|x|^2+|y|^2)^2)^{(q-2)/4}}, \qquad (x,y,t)\in\mathbb{R}^{2n+1}$$

è soluzione, e ogni altra soluzione si esprime nella forma

$$\omega_{\lambda\xi} = \lambda^{(q-2)/2}\omega_0 \circ \delta_\lambda \circ \tau_\xi^{-1},$$

con $\lambda>0$ e $\xi\in\mathbb{R}^{2n+1}$ (si veda [JL1] e [JL2]).

Faremo ora vedere che (2.3) non ha alcuna soluzione. Pertanto, l'unico problema all'infinito non triviale è quello su tutto $\mathbb{R}^{2n+1}$, e utilizzando il principio di concentrazione di compattezza ([L1] e [L2]), si puó verificare che gli unici valori cui è non verificata la condizione di Palais Smale sono i multipli interi di $I_\infty(\omega_0)$, dove I_∞ è definito in (2.4).

In particolare si ha:

Teorema 2.1. I verifica la condizione di Palais Smale al livello λ per ogni $\lambda\in(0,I_\infty(\omega_0))$.

Il problema all'infinito su un semispazio.

Teoremi di non esistenza di soluzioni di (2.3) sono noti sotto opportune ipotesi geometriche su Ω, che estendono a questo contesto la definizione di aperto stellato. Ricordiamo che Ω è stellato rispetto all'origine sse

$L \cdot N(\xi) \geq 0$ per ogni $\xi \in \partial\Omega$, dove N è la normale esterna a Ω, e L è il campo vettoriale

$$L = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + t \frac{\partial}{\partial t}.$$

(qui e nel seguito indichiamo $x \frac{\partial}{\partial x}$ per $\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$).

Garofalo e Lanconelli hanno osservato che L è il campo vettoriale che genera le dilatazioni euclidee, nel senso che $u \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^{2n+1})$ è omogenea di grado k rispetto alle dilatazioni euclidee se e solo se $Lu = ku$. Il campo analogo che genera le dilatazioni di Heisenberg è

$$(2.7) \qquad \Lambda = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + 2t \frac{\partial}{\partial t}.$$

Se invece fissiamo un punto (x_0,y_0,t_0), e consideriamo il gruppo delle traslazioni $\tau_{\alpha(x_0,y_0,t_0)}$ il generatore è

$$(2.8) \qquad P(x,y,t) = x_0\frac{\partial}{\partial x}+ y_0\frac{\partial}{\partial y}+(t_0+2(y_0x-x_0y))\frac{\partial}{\partial t}.$$

Essi hanno pertanto dato la definizione:

Definizione. Ω è aperto stellato rispetto alle dilatazioni di Heisemberg sse $\Lambda \cdot N(\xi) \geq 0$ $\forall \xi \in \partial\Omega$. Fissato (x_0,y_0,t_0), Ω è stellato rispetto alle traslazioni indotte sse $P \cdot N(\xi) \geq 0$ $\forall \xi \in \partial\Omega$.

Hanno poi dimostrato (in [GL]).

Teorema 2.2. Sia Ω un aperto limitato o non limitato e sia

(x_0,y_0,t_0) un punto fissato in Ω. Supponiamo che u sia una soluzione regolare nonnegativa di (2.3) su Ω, e che valga una almeno delle due ipotesi seguenti

(2.9) esiste (x_0,y_0,t_0) tale che Ω è stellato rispetto alle traslazioni ad esso associate e $\dfrac{Pu}{1+d_0} \in L^2(\Omega)$,

(2.10) Ω è stellato rispetto a Λ e $\dfrac{\Lambda u}{1+d_0} \in L^2(\Omega)$

(d_0 è definita in (1.4)). Allora u è identicamente nulla.

Vediamo ora come si applica questo teorema al problema di non esistenza di soluzioni di (2.3), su semispazi:

(2.11) $\Omega = \{(x,y,t)\colon\ ax + by + ct + d > 0\}$.

Poiché Δ_H ha un comportamento diverso nelle diverse direzioni, occorre distinguere due casi, a seconda del valore di c.

Consideriamo dapprima un sottospazio Ω_0 del tipo (2.10), con c=0. Una traslazione manda Ω_0 in

$$\Omega_1=\{(x,y,t)\colon\ ax+by>0\}.$$

D'altra parte una rotazione euclidea nelle variabili x,y manda Ω_1 in

$$\Omega=\{(x,y,t)\colon\ x>0\}.$$

Inoltre Δ_H è invariante per queste trasformazioni, quindi possiamo limitarci a considerare sottospazi di questo tipo. D'altra parte, se scegliamo

$$P(x) = \frac{\partial}{\partial x} - 2y\,\frac{\partial}{\partial t}.$$

si puó provare che l'ipotesi (2.9) è verificata, quindi (2.3) ha solo la soluzione banale.

Consideriamo ora un semispazio

$$\Omega = \{(x,y,t):\ ax + by + ct + d > 0\}.$$

con $c \neq 0$. Se $\xi_0 = (\frac{b}{2c}, -\frac{a}{2c}, \frac{d}{c})$, la traslazione associata a ξ_0^{-1} manda Ω in

$$\xi_0^{-1}\,\Omega = \{(x,y,t): t > 0\}.$$

Possiamo quindi restringerci ad aperti di questo tipo.

Proposizione 2.3. Se $\Omega = \{(x,y,t):\ t>0\}$, il problema (2.3) non ha soluzioni non banali in $S_0^1(\Omega)$.

Dimostrazione. Supponiamo che u sia soluzione nonnegativa, e sia

$$Z = \sum_{j=1}^{n} \left(y_j\frac{\partial}{\partial x_j} - x_j\frac{\partial}{\partial y_j} + 2(x_j^2+y_j^2)\frac{\partial}{\partial t}\right),$$

Con alcune integrazioni per parti si prova che per ogni $R>0$

$$\int_{\partial\Omega\cap B_R} |D_H u|^2\, Z\cdot N\, dH_{q-2} = -2\int_{\Omega\cap\partial B_R} D_H u\cdot\frac{D_H d_0}{|D_H d_0|}\, Zu\, dH_{q-2} + \int_{\Omega\cap\partial B_R} |D_H u|^2\, Z\cdot N\, dH_{q-2}$$

$$-\, 2\frac{(q+2)}{(q-2)}\int_{\Omega\cap\partial B_R} u^{2q/(q-2)}\, Z\cdot N\, dH_{q-2}$$

D'altra parte, poiché $Z=\sum_{j=1}^{n} y_j X_j - x_j Y_j$, e $X_j u$, $Y_j u \in L^2(\Omega)$, per ipotesi, allora $\frac{Zu}{1+d_0} \in L^2(\Omega)$, verifica cioè la condizione di sommabilità richiesta nel Teorema 2.2. Procedendo come nella prova di quello si vede che integrali sul bordo di B_R tendono a zero per R tendente a $+\infty$. Quindi

$$\int_{\partial\Omega} |D_H u|^2 Z\cdot N(x) = 0.$$

Ora, poiché $Z\cdot N(x)\geq 0$ quasi dappertutto, $D_H u=0$ q.d. Allora, fissato un punto $\xi_0 \in \partial\Omega$, e $r>0$, la funzione che coincide con u su $B(\xi_0,r)\cap\overline{\Omega}$, e vale zero in $B(\xi_0,r)\setminus\overline{\Omega}$, è soluzione nonnegativa di $-\Delta_H u=u^{2q/(q-2)}$ su tutta la palla $B(\xi_0,r)$. D'altra parte u verifica una disuguaglianza di tipo Harnack, e quindi $u\equiv 0$ in $B(\xi_0,r)$. Con un semplice argomento di connessione si conclude che $u\equiv 0$ in Ω.

§ 3 Prova del teorema 1.1.

Se λ_1 è il primo autovalore di Δ_H, λ_1 è strettamente positivo, e l'autovettore corrispondente ϕ_1 è positivo. Le due proposizioni seguenti provano il Teorema 1.1:

Teorema 3.1. Se $a\geq\lambda_1$, allora il problema (1.1) non ha soluzione nonnegativa.

Dimostrazione. Per assurdo supponiamo che il problema abbia una soluzione u. Poiché ϕ_1 è autovalore si ha

$$\lambda_1\int\phi_1 u = \int D_H u\cdot D_H\phi_1 =$$

poiché u è soluzione

$$= a\int u\phi_1 + \int u^{(q+2)/(q-2)}\phi_1 > a\int u\phi_1.$$

Ne viene che $\lambda_1 > a$, che è assurdo.

Teorema 3.2. Sia Ω un aperto limitato, e sia $a\in(0,\lambda_1)$. allora (1.1) ha almeno una soluzione nonnegativa.

La prova del teorema 3.2 è una senplice applicazione del teorema del passo di montagna di Ambrosetti Rabinovitz, che si enuncia come segue.

Teorema. 3.3. Sia $I\in C^1(X,\mathbb{R})$ tale che $I(0)=0$ e

i) $\exists a>0,\ \rho>0$: $\forall x\in\partial B(0,\rho)\ I(x)\geq\alpha$.

ii) $\exists u_0$: $\|u_0\|>\rho$, $I(u_0)<0$.

Posto

$$c=\inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{u\in\gamma} I(u), \text{ dove } \Gamma=\{\gamma:\ \gamma(0)=0,\ \gamma(1)=u_0\},$$

si ha $c\geq\alpha$, e, se vale la condizione di Palais Smale al livello c, allora esiste un punto critico per I.

Verifichiamo che il funzionale I verifica tutte le ipotesi del Teorema del passo di montagna. Indicato $2^*=2q/(q-2)$, poiché I somma di potenze diverse:

$$I(\vartheta u) = \frac{\vartheta^2}{2}\int |D_H u|^2 - \frac{\vartheta^2}{2}\int au^2 - \frac{\vartheta^{2^*}}{2^*}\int au^{2^*}$$

è abbastanza facile provare che i) è verificata, ed inoltre che per ogni $u \in S^1_0(\Omega)$ si ha

$$\lim_{\vartheta\to\infty} I(\vartheta u) = -\infty. \tag{3.1}$$

Se proviamo che esiste $\bar{u}>0$ tale che

$$\sup_{\vartheta>0} I(\vartheta\bar{u}) < I_\infty(\omega_0), \tag{3.2}$$

avremo la tesi (ω_0 è la soluzione del problema all'infinito, introdotta in (2.6)). Infatti, per (3.1) possiamo scegliere $\vartheta_0>0$ in modo che

$$\vartheta_0\bar{u}>\alpha, \text{ e } I(\vartheta_0\bar{u}) <0.$$

Quindi $v_0=\vartheta_0\bar{u}$, verifica ii), e la curva $t\longrightarrow tv_0$ appartiene a Γ, quindi

$$c=\inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{u\in\gamma} I(u) \le \max_{t\in[0,1]} I(tv_0) \le \sup_{\vartheta\ge 0} I(\vartheta u) < I_\infty(\omega_0).$$

Per il teorema 3.1, I verifica PS al livello c, quindi il Teorema 3.3 asicura l'esistenza di un punto critico di I.

Rimane quindi soltanto da costruire una funzione che verifichi (3.2). La funzione che consideriamo è analoga a quella introdotta in (2.5). Supponiamo che $0\in\Omega$, e fissiamo $R>0$ in modo che $B(0,2R)\subseteq\Omega$. Cerchiamo poi v_λ nella forma

$$v_\lambda = \varphi\omega_{\lambda 0},$$

dove φ è di classe $C^1_0(B(0,2R))$, $\varphi\equiv 1$ in $B(0,R)$, e $\omega_{\lambda 0}$ è definita in

(2.6).

Lemma 3.4. la funzione $v_\lambda = \varphi\omega_{\lambda 0}$ soddisfa le stime seguenti:

$$\int v_\lambda^{2^*} = \|D_H\omega_0\|^2 + O(\lambda^{-q});$$

$$\int v_\lambda^{2} = \begin{cases} O(\log(\lambda))\lambda^{-2}) & \text{se} \quad q=4 \\ O(\lambda^{-2}) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\|D_H v_\lambda\|^2 = \|D_H\omega_0\|^2 + O(\lambda^{-(q-2)}).$$

Dimostrazione. Riportiamo per semplicità soltanto la prova della prima affermazione, le altre essendo non dissimili. Stimiamo dapprima $\int(1-\varphi^{2^*})\omega_{\lambda 0}^{2^*}$.

$$\int(1-\varphi^{2^*})\omega_{\lambda 0}^{2^*} \le \int_{|\xi|>R} \omega_{\lambda 0}^{2^*}(\xi)\, d\xi = \lambda^q \int_{|\xi|>R} \omega_0^{2^*}(\lambda\xi)\, d\xi =$$

$$= \int_{|\eta|>\lambda R} \omega_0^{2^*}(\eta)\, d\eta = \int_{|\eta|>\lambda R} \frac{1}{|\eta|^{2q}} = O(\lambda^{-q}).$$

Allora

$$\int v_\lambda^{2^*} = \int \omega_0^{2^*} - \int(1-\varphi^{2^*})\omega_{\lambda 0}^{2^*} = \|D\omega_0\|^2 + O(\lambda^{-q}).$$

Dimostrazione di (3.2). Poiché

$$I(\vartheta v_\lambda) = \frac{\vartheta^2}{2}\int |D_H v_\lambda|^2 - \frac{\vartheta^2}{2}\int a v_\lambda^{2} - \frac{\vartheta^{2^*}}{2^*}\int a v_\lambda^{2^*}$$

la funzione $\vartheta \longrightarrow I(\vartheta v_\lambda)$ è un polinomio che verifica

$I(\vartheta v_\lambda) \longrightarrow -\infty$ per $\vartheta \longrightarrow +\infty$, e $I(0) = 0$.

Ammette pertanto massimo in $[0,+\infty)$, che si calcola con mezzi elementari e vale

$$\max_{\vartheta>0} I(\vartheta v_\lambda) = I(\vartheta_\lambda v_\lambda) = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^*}\right)\left(\frac{\left(\int |D_H v_\lambda|^2 - \int a v_\lambda^2\right)^{1/2}}{\left(\int |v_\lambda|^{2^*}\right)^{1/2^*}}\right)^q =$$

per le stime precedenti

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^*}\right)\left(\frac{\left(\int |D_H \omega_0|^2 + O(\lambda^{-q}) - \int a v_\lambda^2\right)^{1/2}}{\left(\int |D_H \omega_0|^2 + O(\lambda^{-(q-2)})\right)^{1/2^*}}\right)^q =$$

poiché $\int a\, v_\lambda^2 = O(\lambda^{-2})$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^*}\right)\int |D_H \omega_0|^2 \left(1-C_0\int a\, v_\lambda^2\right) <$$

poiché $a>0$, e ω_0 è soluzione di (3.3)

$$< \frac{1}{2}\int |D_H \omega_0|^2 - \frac{1}{2^*}\int \omega_0^{2^*} = I_\infty(\omega_0).$$

Bibliografia

[BC] A. BAHRI e J. M. CORON, *On a linear Elliptic Equation involving the critical Sobolev exponent: the effect of the topology of the domain,* Comm. Pure Appl. Math, Vol XLI(1988), 253–294.

[BN] H.BREZIS e NIRENBERG, *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Comm pure appl. Math. 36, 437–477 (1983).

[CGL] G.CITTI, N.GAROFALO e E.LANCONELLI, *Harnack's inequality for sum of squaresplus a potential*, apparit' su Amer. J. of Math.

[D] W.DING, *Positive solutions of* $\Delta u + u^{(n+2)/(n-2)} = 0$ *on contractible domains*, J.P.D.E. 2(1989) n.4, 83–88.

[EL] M.J.ESTEBAN e P.L.LIONS, *Existence and non Existence Results for Semilinear Elliptic Problems in Unbounded Domains*, Proc. Royal Edinburgh Soc., 93 A (1982), 1–14.

[GL] N.GAROFALO e E.LANCONELLI, *Existence and nonexistence results for semilinear equations on the Heisenberg group*, apparirà su Indiana Univ. Math. J.

[F] G.B.. FOLLAND, *Subelliptic estimates and function Spaces on nihilpotent Lie groups*, Ark. für Math, 13(1975), 161–207.

[FS] G.B. FOLLAND e E.M.STEIN, *Estimates for the* $\bar{\partial}_b$ *complex and analysis on the Heisenberg group*, Comm. Pure Appl. Math, 27(1974), 429–522.

[JL1] D.S.JERISON e J.M.LEE, *Intrinsic CR coordinates and the CR Yamabe problem*. J. Diff. Geom., 29(1989), 303–343.

[JL2] D.S.JERISON e J.M.LEE, *Extremals of the Sobolev inequality on the Heisenberg group and the CR Yamabe problem*, J. Amer. Math Soc., 1(1988), 1–13.

[L1] P.L.LIONS, *The Concentration-Compactness Principle in the Calculus of Variations. The Locally Compact Case, part 1.*, Ann. I. H. P. Anal. non linéaire, v.1, n.2 (1984), 109–145.

[L2] P.L.LIONS, *The Concentration-Compactness Principle in the Calculus of Variations. The Locally Compact Case, part 2.* Ann. I. H. P. Anal non linéaire, v.1, n.4 (1984), 223–283.

[P] S.I. POHOZAEV, *Eingenfunctions of the equation* $\Delta u+\lambda f(u)=0$, Soviet Math. Doklady 6(1965), 1408–1411; (tradotto da Russian Dokl. Akad. Nauk SSSR 165(1965), 33–36).

[Pa] D.PASSASEO, *Multiplicity of positive solutions of nonlinear elliptic equations with critical Sobolev exponent in some contrctible domains.* Manuscripta Math. 65 (1989), 147–166.